

Lemma 3.1. Se $f \in \mathcal{H}_G$ è E-ortogonale a $\tilde{\mathcal{H}}$ allora $f_2^{(0)} = 0$ e $f_1^{(0)} = c y^{\left(\frac{n+1}{2}\right)}$ se $y \geq a$.

Con l'aiuto di questo lemma la dimostrazione del seguente teorema diventa del tutto simile a quella del teorema 6.6 pag. 126 di [6].

Teorema 3.1. Sia $K = \mathcal{H}_G \ominus \tilde{\mathcal{H}}$, allora per ogni λ nel risolvente di A , l'operatore $(\lambda I - A)^{-1}$ trasforma la palla unitaria di K in un sottoinsieme compatto di \mathcal{H}_G .

n.4. La rappresentazione per traslazioni; spazi di entrata e di uscita.

Definiamo i seguenti spazi:

$$\begin{cases} \mathcal{D}_+ = \{f \in \tilde{\mathcal{H}} / \sigma(f) \in \mathbb{D}_+\} \\ \mathcal{D}_- = \{f \in \tilde{\mathcal{H}} / \sigma(f) \in \mathbb{D}_-\} \end{cases} \quad (4.1)$$

\mathcal{D}_+ e \mathcal{D}_- coincidono con gli spazi chiusi generati dai dati del tipo (3.7) e (3.8) rispettivamente; valgono inoltre i seguenti fatti:

$\mathcal{D}_+ + \mathcal{D}_- = \tilde{\mathcal{H}}$, \mathcal{D}_+ è ortogonale a \mathcal{D}_- , inoltre \mathcal{D}_\pm , $\tilde{\mathcal{H}}$ $U(t)$ soddisfano le condizioni (i)(ii)(iii) di § 2 a pag. 12 di [6], in quanto σ risulta essere un'isometria di $\tilde{\mathcal{H}}$ (con energia E) sullo spazio libero \mathcal{H} (con energia E) che trasforma \mathcal{D}_\pm rispettivamente in \mathbb{D}_\pm .

Ora seguendo [6] poiché \mathcal{D}_+ e \mathcal{D}_- non sono in \mathcal{H}'_E proiettiamo \mathcal{H}_G su tutto \mathcal{H}'_E mediante la proiezione E-ortogonale:

$$Q' : \mathcal{H}_G \rightarrow \mathcal{H}'_E \quad (4.2)$$

$$Q'f = f + \sum_j a_j f_j^+ + \sum_j b_j f_j^-$$

$$\text{dove } a_j = \frac{E(f, f_j^+)}{\lambda_j^2} \quad \text{e} \quad b_j = \frac{E(f, f_j^-)}{\lambda_j^2} .$$

Considerazioni analoghe a quelle fatte in [4] provano che per $\mathcal{D}_{\pm} = Q' \mathcal{D}_{\pm}$ valgono i seguenti fatti:

\mathcal{D}_{\pm}' sono chiusi in \mathcal{H}_E' e soddisfano le condizioni (i)(ii)(iii) di § 2 a pag.12 di [6], Q' è una E-isometria iniettiva di \mathcal{D}_{\pm} in \mathcal{D}_{\pm}' ; inoltre

$$\mathcal{H}_E' = \mathcal{H}_P' \oplus \mathcal{H}_C' \quad (4.3)$$

dove \mathcal{H}_P' è lo spazio generato dai dati $f \in \mathcal{H}_1$ tali che $A(f)$ è nullo in \mathcal{H}_E' ed \mathcal{H}_C' è il complemento E-ortogonale delle autofunzioni di A in \mathcal{H}_E' .

Risulta:

$$\mathcal{H}_C' \subset \overline{U U(t) \mathcal{D}_{\pm}'}$$

Troveremo ora le rappresentazioni per traslazione di \mathcal{D}_{\pm}' e \mathcal{D}_{\pm}' su \mathcal{H}_C' provando così che $U(t)$ ha uno spettro assolutamente continuo su $\overline{U U(t) \mathcal{D}_{\pm}'}$ e pertanto $\overline{U U(t) \mathcal{D}_{\pm}'} \subset \mathcal{H}_C'$.

Se f è un dato C_0^∞ nullo per $y \leq a$ e dipendente solo da y definiamo

$$\tilde{f}(z) = \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty} f(\gamma z) D(\gamma) \quad (4.4)$$

dove $D(\gamma) = (cz+d)^n$ se $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; \tilde{f} è allora un dato automorfo di peso n sul semipiano π che coincide con f sul dominio fondamentale F : se $z \in F$ e $\gamma \neq \text{id}$ allora $\gamma z \notin F$ e quindi

$$\text{Im}(\gamma z) < a \quad (4.5)$$

Per \tilde{f} come in (4.4) possiamo definire $\sigma(\tilde{f})$ secondo le formule (3.3) in quanto \tilde{f} è definita su tutto il semipiano, inoltre poiché \tilde{f} coincide con f

sul dominio fondamentale F si ha:

$$\begin{aligned} E(\tilde{f}) &= E(f) \\ U(t)\tilde{f} &= U(t)f \end{aligned} \quad (4.6)$$

su F .

Definiamo ora per f e \tilde{f} come sopra:

$$\begin{aligned} R_+ f &= \mathbb{R}_+(\sigma(f)) \\ R_+^{\sim} \tilde{f} &= \mathbb{R}_+(\sigma(f)) \end{aligned} \quad (4.7)$$

Ricordiamo che \mathbb{R}_+ denota l'operatore: $(g_1, g_2) \rightarrow \text{cost } (\partial_r g_1(r) - g_2(r))$.

Valgono i seguenti fatti (che discendono da analoghi fatti per la rappresentazione \mathbb{R} su \mathbb{H}):

- $\alpha)$ $\| R_+ f \| = E(f)$ (da (3.5))
- $\beta)$ $R_+ U(t)f = T(t) R_+ f$ (da (3.9))
- $\gamma)$ R_+ mappa \mathfrak{D}_+ su tutto lo spazio delle funzioni a quadrato sommabile con supporto in \mathbb{R}_+ .

Proviamo che $R_+^{\sim} \tilde{f} = R_+ f$ per $f \in \mathfrak{D}_-$.

Se $f_0 = \{y^{(\frac{n+1}{2})} \phi(y), -y^{(\frac{n+3}{2})} \phi'(y)\}$ la soluzione di (2.1) con dato iniziale f_0 è data da:

$$u_0(z, t) = y^{\frac{n+1}{2}} \phi(y e^{-t})$$

quindi per $t \geq 0$ anche $U(t)f_0$ si annulla per $y \leq a$ ne segue da (4.5) e (4.6) che per $t \geq 0$:

$$\widetilde{U(t)f_0} = U(t)f_0 = U(t)\tilde{f}_0 \quad \text{su } F.$$

Quindi $R_+ U(t) f_0 = R_+ U(t) \tilde{f}_0$ per $t \geq 0$ e $y \geq a$; poiché inoltre $\sigma(\tilde{f}_0)$ dipende solo da y , ancora una volta l'unicità della soluzione dell'equazione delle onde nello spazio libero con valore iniziale fissato garantisce che

$$T(t) R_+ f_0 = T(t) R_+ \tilde{f}_0$$

per ogni $t \geq 0$ ed $s \geq \log a$, da cui si deduce che tale uguaglianza vale per ogni s e quindi che

$$R_+ f = R_+ \tilde{f} \quad \text{per } f \in \overline{U U(t) \mathcal{D}_-}$$

E' ovvio inoltre che vale l'uguaglianza:

$$\|R_+ \tilde{f}\| = E(\tilde{f}) .$$

In modo analogo a (4.7) si definiscono:

$$R_- \tilde{f} = R_- (\sigma(\tilde{f}))$$

$$R_- f = R_- (\sigma(f))$$

Ricordando le espressioni di R_+ e R_- :

$$(R_+ \sigma(f))(r) = -\frac{1}{2} (\partial_r \sigma_1(f)(r) - \sigma_2(f)(r))$$

$$(R_+ \sigma(f))(r) = -\frac{1}{2} (\partial_r \sigma_1(f)(-r) + \sigma_2(f)(-r))$$

ogni elemento d'_+ e \mathcal{D}'_+ si può scrivere:

$$d'_+ = d_+ + p$$

dove $d_+ \in \mathcal{D}_+$ e $p \in \mathcal{P}$, inoltre si ha $E(d'_+) = E(d_+)$ e poiché $\|R_+ p\| = E(p) = 0$ $\forall p \in \mathcal{P} \cap \mathcal{D}_+$, ha senso definire:

$$R_+ d'_+ = R_+ d_+ .$$

E' chiaro a questo punto che R_+ (R_-) definisce una \mathcal{D}'_+ -rappresentazione (\mathcal{D}'_- -rappresentazione) per traslazione di uscita (di entrata).